

**硕士研究生招生考试**

**数学基础综合（数学分析、高等代数、解析几何）科目大纲**

(科目代码：834)

学院名称(盖章)： 数学与统计学院

学院负责人(签字)：

编 制 时 间： 2024年 9 月1 日

**学科教学（数学）专业 综合考试（数学分析、高等代数、解析几何）科目大纲**

(科目代码：XXX)

**一、考核要求**

数学分析、高等代数、解析几何是学科教学（数学）研究生进行硕士阶段专业知识学习的重要基础，也为高观点下深入理解中学数学教学内容所必需。本门考试包含三门课程：数学分析、高等代数、解析几何，总分为150分，每门课程约占总分值的三分之一。

**二、考核评价目标**

综合考试主要考察考生对专业核心课程的基本理论和基本方法的掌握情况，以及能综合利用所学知识分析和解决一些实际问题的能力。

**三、考核内容**

**《数学分析》**

1. **极限**
2. **实数集与函数**

考核不等式、集合、映射、函数、初等函数、领域、上确界、下确界的定义，会进行集合运算和函数的各种表示，能分析函数的有界性、奇偶性、单调性和周期性，熟悉确界原理。

**第二节 数列极限**

考核数列、数列极限的定义、无穷小数列，收敛数列的性质，数列极限的四则运算，单调数列及单调有界定理，Cauchy列及收敛准则。

**第三节 函数极限**

考核函数极限的定义、性质、四则运算、与数列极限的关系，单侧极限、Cauchy收敛原理，两个重要极限，无穷小量与无穷大量及关系。

**第四节 连续函数**

充分理解并掌握函数极限的定义、连续的定义、函数极限与数列极限的关系、Cauchy收敛原理、一致连续的概念；能应用函数极限、连续以及一致连续的定义进行分析、论证，能用无穷小量对极限进行分析，区别无穷小量能否进行代换的条件，区分不连续点的类型。

**第五节 实数基本定理**

能综合应用确界原理，单调有界定理，区间套定理进行分析论证，应用收敛子列定理和Cauchy收敛定理进行基本证明。

**第二章 一元函数微分学**

**第一节 导数和微分**

会应用导数的定义、四则运算法则、反函数的求导法则和复合函数求导法则求导数和高阶导数，能综合应用各种方法求函数的导数。

**第二节 微分中值定理及应用**

领会微分中值定理、Taylor公式的深刻含义，能用微分中值定理进行分析、论证，能将函数展开成Taylor多项式和其余项之和，能综合使用Hospital法则及Taylor公式求函数及数列的极限。能综合应用函数的凸性、单调性（利用导数）及中值定理分析和解决问题。

**第三章 一元函数积分学**

**第一节 积分的计算、性质及应用**

能综合应用各种方法（包括定义、基本公式、线性性质、换元积分法、分部积分法），计算出一般函数的积分；重点掌握定积分的概念，Darboux和概念等；熟练掌握可积的充要条件，可积函数类，定积分的性质，微积分基本定理，掌握求面积、弧长、体积和侧面积的方法，了解微元法及其应用。

**第二节 反常积分**

掌握反常积分敛散性的定义，奇点，了解Cauchy主值和反常积分收敛的关系，掌握一些重要的反常积分收敛和发散的例子，理解并掌握绝对收敛和条件收敛的概念并能用反常积分的Cauchy收敛原理、非负函数反常积分的比较判别法、Cauchy判别法，以及一般函数反常积分的Abel、Dirichlet判别法判别基本的反常积分，熟练应用积分第二中值定理。

**第四章 级数**

**第一节 数项级数**

准确理解敛散性概念、级数收敛的必要条件和其它性质，熟练地求一些级数的和；了解上极限与下极限的概念、性质、求上极限与下极限的方法；熟练利用正项级数的收敛原理，比较判别法，比式判别法和根式判别法，积分判别法判别正项级数的敛散性；准确理解Leibniz级数，熟练利用Leibniz级数，Abel、Dirichlet判别法判别一般级数的敛散性。

1. **函数项级数与幂级数**

重点理解点态收敛、一致收敛和内闭一致收敛的概念，掌握函数列一致收敛的判别法；能熟练应用函数项级数的Cauchy收敛原理，Weierstrass判别法，Abel、Dirichlet判别法，掌握一致收敛级数的连续性、可导性和可积性；重点掌握幂级数收敛半径的求法，可以利用幂级数可导和可积性求幂级数的和，掌握函数幂级数展开的条件，初等函数的幂级数展开。

**第三节 傅里叶级数**

熟练掌握函数的Fourier级数展开；综合分析Fourier级数的敛散性；理解并合理利用Fourier级数的分析性质和逼近性质；了解Fourier变换的性质及其在理论分析和实际计算中的应用。

**第五章 多元函数微分学**

**第一节 多元函数的极限与连续**

考核R2 中的有界集，内点，边界点，孤立点，聚点，开集和闭集及其关系，闭包，理解闭矩形套定理， Bolzano-Weierstrass定理，Cauchy收敛定理，紧集及其Heine-Borel定理；掌握多元函数的定义，多元函数的重极限和二次极限及其关系，多元函数的连续，了解向量值函数及其极限、连续等性质；了解紧集上的连续映射概念，紧集上连续函数的有界性、最值定理、一致连续性定理、中间值定理，掌握连通集和区域等概念。

**第二节 多元函数的导数、微分及应用**

重点掌握偏导数，方向导数，全微分，连续、可偏导、可微之间的关系，梯度，高阶偏导数，掌握混合偏导数的相等的条件，向量值函数的导数；掌握多元复合函数的链式法及其应用，掌握一阶全微分的形式不变性。

**第三节 隐函数定理及应用**

考核隐函数定理及其应用，会计算隐函数的导数；掌握无条件极值与条件极值的求法。

**第六章 多元函数积分学**

**第一节 重积分**

理解重积分与反常重积分的概念；了解二重积分的可积函数类与性质；熟练掌握二重积分、n重积分及反常重积分的算法；掌握二重积分与n重积分的变量代换。

**第二节 曲线积分和曲面积分**

综合分析第一、二类曲线积分与曲面积分的概念与计算；掌握Green公式、Gauss公式和Stokes公式及其应用；掌握梯度的概念，了解通量与散度、向量线、环量与旋度的概念及简单应用。

**第三节 含参变量积分**

熟练掌握含参变量的正常积分的定义及分析性质；熟练掌握含参变量的反常积分的一致收敛的判别法及一致收敛积分的分析性质；了解Beta函数和Gamma函数的性质、递推公式及二者之间的关系。

**参考书目：**

1. 华东师范大学数学系编，《数学分析》（上，下），高等教育出版社，2010年（第四版））。

2. 陈纪修，於崇华，金路，《数学分析》（上，下），高等教育出版社，2000年（第一版）。

3. 裴礼文，《数学分析中的典型问题与方法》，高等教育出版社，2006年（第二版）。

4. 刘三阳，于力，李广民，《数学分析选讲》，科学出版社，2007年（第一版）。

**《高等代数》**

**第一章 基本概念**

**第一节 集合与映射**

主要考核单射、满射、双射及的概念及可逆映射的基本性质。

**第二节 数学归纳法**

主要考核第一数学归纳法和第二数学归纳法原理。

**第三节 整数的整除性质**

主要考核带余除法、素数、合数、最大公因数等概念及性质。

**第四节 数环与数域**

主要考核数环、数域这两个基本概念及二者之间的关系

**第二章 多项式**

**第一节 一元多项式的定义及运算**

考核多项式的加法、减法与乘法运算，给出多项式次数的定义，零次多项式与零多项式。

**第二节 多项式的整除性**

考核带余除法定理，它是多项式理论的核心内容。

**第三节 最大公因式**

考核最大公因式的概念、求法，特别是辗转相除法，另外考核多项式互素的概念和判断互素的充分必要条件。

**第四节 多项式的分解**

考核多项式因式分解的思想。

**第五节 重因式**

考核多项式重因式的概念、有无重因式的充分必要条件。

**第六节 多项式函数 多项式的根**

考核多项式的函数的观点与形式观点统一的思想。

**第七节 复数域和实数域上的多项式**

考核系数在复数域上和系数在实数域上的多项式的特点，考核复系数多项式只有一次的是不可约的，而实系数多项式只有一次的和某些二次的是不可约的。

**第八节 有理系数多项式**

考核有理系数多项式的概念，指出有理系数多项式在有理数域上的分解与在整数集合上的分解是一回事，给出有理系数多项式根的求法和判别有理根的艾森斯坦因方法。

**第三章 行列式**

**第一节 线性方程组与行列式**

考核2×2线性方程组与二阶行列式的关系，3×3线性方程组与三阶行列式的关系， n×n线性方程组与n阶行列式是什么关系。

**第二节 排列**

考核排列概念及基本性质，其中包括偶排列、奇排列、反序数、n!个排列中奇排列、偶排列各占一半。

**第三节 n阶行列式**

考核n阶行列式的定义，性质。

**第四节 子式和代数余子式**

考核按行按列展开的计算方法。

**第五节 克拉默规则**

考核克拉默规则，

**第四章 线性方程组**

**第一节 线性方程组的消元解法**

考核线性方程组的高斯消元法、线性方程线的同解变形、线性方程组的消元法与它的增广矩阵行初等变换的一致性。

**第二节 矩阵的秩、方程组有解判别定理**

考核矩阵的秩、初等变换不改变矩阵的秩、线性方程组有解的充分必要条件是系数矩阵与增广矩阵的秩相等。

**第三节 线性方程组的公式解**

考核n×n 线性方程组的系数行列式为零时，如何用克拉默规则解该方程组，进一步讨论一般的n×m(n≠m)线性方程组的公式解法。

**第四节 结式和判别式**

考核二元二次方程组的解法。

**第五章 矩阵**

**第一节 矩阵的运算**

考核矩阵的加法、数与矩阵的乘法、矩阵的乘法。

**第二节 可逆矩阵、矩阵乘积的行列式**

考核n阶矩阵的逆矩阵、n阶矩阵的行列式、矩阵乘积的行列式与各自行列式的关系、n阶方阵可逆时逆矩阵的求法。

**第三节 矩阵的分块**

考核矩阵的分块理论，也就是把矩阵中一部分元素看作一个块（或一个元素）来处理矩阵的有关问题。

**第六章 向量空间**

**第一节 定义及例子**

考核向量空间的定义的理解。

**第二节 子空间**

考核向量空间的子空间、交子空间，和子空间及子空间的判定定理。

**第三节 向量的线性相关性**

考核向量的线性组合、线性相关、线性无关、极大线性无关组、向量组的等价、向量组的秩。

**第四节 基和维数**

考核向量空间的基、维数、向量空间的维数公式、余子空间。

**第五节 坐标**

考核向量由基的表示式、坐标、过渡矩阵、坐标变换公式。

**第六节 向量空间的同构**

考核向量空间之间的映射、向量空间的同构。

**第七节 齐次线性方程组的解空间**

考核矩阵的行空间、列空间、行空间的秩与矩阵的秩、齐次线性方程的解空间、基础解系、解空间的结构。

**第七章 线性变换**

**第一节 线性映射**

考核两个向量空间的线性映射、映射的象与核。

**第二节 线性变换的运算**

考核向量空间到自身的线性变换、线性变换的和变换、数乘线性变换、线性变换的乘积、线性变换的逆线性变换。

**第三节 线性变换的矩阵**

考核线性变换在一个基下的矩阵、矩阵确定的线性变换、线性变换的运算与相应的矩阵运算、同一个线性变换在不同基下矩阵的关系。

**第四节 不变子空间**

考核线性变换下子空间的不变性、象不变子空间、核不变子空间、不变子空间与线性变换的对角化。

**第五节 本征值与本征向量**

考核矩阵的特征值、特征向量、线性变换的本征值与本征向量、特征子空间。

**第六节 可以对角化的矩阵**

考核一个线性变换可以对角化的充分必要条件。

**第八章 欧氏空间**

**第一节 向量的内积**

考核实数域上向量空间的内积、欧氏空间、向量的长度、夹角、哥西一许瓦兹不等式。

**第二节 正交基**

考核向量的正交性、正交向量组、正交基、标准正交基、度量矩阵、施密特正交化方法、正交矩阵。

**第三节 正交变换**

考核保持向量长度不变的正交变换、正交矩阵的性质、正交变换的四个等价条件。

**第四节 对称变换和对称矩阵**

考核对称变换、对称矩阵、对称变换的对角化问题、实对称矩阵的特征值问题。

**第九章 二次型**

**第一节 二次型和对称矩阵**

考核n元二次多项式总可以用一个对称矩阵来表示，从而通过矩阵的乘法转化了二次型的表达形式，这样把一个二次型（既一个多项式的问题）用对称矩阵及矩阵的合同变换（成对的行、列初等变换）来处理。从而使问题简单明了。

**第二节 复数域和实数域上的二次型**

考核复系数二次型与实系数二次型的典范形式。

**第三节 正定二次型**

考核了实数域上秩为n的二次型的特征。

**第四节 主轴问题**

考核通过正交变换化二次型为平方和形式的方法。

**参考书目：**

[1] 张禾瑞, 郝鈵新. 高等代数. 北京: 高等教育出版社, 2007年第5版.

[2] 王萼芳, 石生明. 高等代数. 北京: 高等教育出版社, 2003年第3版.

[3] 刘仲奎, 杨永保, 程辉, 陈祥恩, 汪小琳. 高等代数. 北京: 高等教育出版社, 2003年.

[4] 陈祥恩, 程辉, 乔虎生，刘仲奎. 高等代数专题选讲. 北京: 中国科学技术出版社, 2013年.

**《解析几何》**

**第一章 向量与坐标**

1·1向量的概念、向量的线性运算、向量的线性关系和向量分解

1·2坐标系与向量的坐标

1·3向量在给定方向上的射影

1·4向量的内积

1·5向量的外积

1·6三向量的混合积

**考核要点：**向量的概念与运算、坐标与坐标系、用坐标进行向量的运算、向量共线或共面的必要条件。熟练掌握和运用向量的基本知识，解决关于共线、共面、定比分点等仿射性质的问题；解决关于长度、夹角、面积、体积等度量问题。

**第二章 轨迹与方程**

2·1平面曲线的方程

2·2曲面的方程

2·3母线平行于坐标轴的柱面方程

2·4空间曲线的方程

**考核要点：**建立动点轨迹的方程是解析几何的基本思想。学生应当深刻理解轨迹与其方程之间的关系，能熟练地掌握建立曲面或曲线的方程的方法以及直角坐标方程和参数方程的相互转化。

**第三章 平面与空间直线**

3·1平面的方程

3·2平面与点的相关位置

3·3两平面的相关位置

3·4空间直线的方程

3·5直线与平面的相关位置

3·6空间两直线的相关位置、

3·7空间直线与点的相关位置

3·8平面束

**考核要点：**平面与空间直线的各种形式的方程，平面与平面、平面与点、平面与直线、直线与点、直线与直线之间的相关位置。

**第四章 柱面、锥面、旋转面与二次曲面**

4·1柱面

4·2锥面

4·3旋转曲面

4·4椭球面

4·5双曲面

4·6抛物面

4·7单叶双曲面与双曲抛物面的直母线。

**考核要点：**柱面方程、锥面方程、旋转面方程的建立方法、齐次方程、绕坐标轴旋转的旋转面方程、椭球面、双曲面、抛物面的方程、单叶双曲面与双曲抛物面的直母线族方程。

**第五章 二次曲面的一般理论**

5·1二次曲面与直线的相关位置

5·2二次曲面的渐近方向与中心

5·3二次曲面的切线与切平面

5·4二次曲面的径面与奇向

5·5二次曲面的主径面与主方向、特征方程与特征根

5·6二次曲面方程的化简与分类

5·7应用不变量化简二次曲面的方程

**考核要点：**二次曲面的渐近方向与非渐近方向、中心、切线、切平面、奇点、径面、奇向、主径面与主方向、特征方程与特征根、二次曲面方程的化简与分类、直角坐标变换、应用不变量化简二次曲面的方程。

**三、参考书目**

[1]吕林根、许子道. 解析几何.北京：高等教育出版社，2001年第3版.

[2]南开大学主编.空间解析几何. 北京：高等教育出版社，2002年.

[3]吕林根、许子道.解析几何学习辅导书.北京：高等教育出版社，2006年.

[4]刘建成、贺群. 空间解析几何.北京：科学出版社，2018年.