

沈阳工业大学

2020 年硕士研究生招生考试题签

(请考生将题答在答题册上, 答在题签上无效)

科目名称: 高等代数

第 1 页共 3 页

一、(60 分, 每小题 6 分) 判断对错并简述理由

1、若多项式 $x^d - 1$ 能整除 $x^n - 1$, 则 d 一定整除 n .2、下列线性方程组解中 x_1 的值一定是 3.

$$\begin{cases} x_1 + x_2 - 2x_3 = -2, \\ x_2 + 2x_3 = 1, \\ x_1 - x_2 = 2. \end{cases}$$

$$\begin{pmatrix} 3 & 1 & 0 & 2 \\ 1 & -1 & 2 & -1 \\ 1 & 3 & -4 & 4 \end{pmatrix}$$

3、矩阵 $\begin{pmatrix} 3 & 1 & 0 & 2 \\ 1 & -1 & 2 & -1 \\ 1 & 3 & -4 & 4 \end{pmatrix}$ 的秩是 3.4、设 A 是三阶可逆矩阵, 将 A 的第一行与第三行互换后所得的矩阵记为 B , 那么 AB^{-1} 是一个初等矩阵.5、已知 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ 线性无关, 若 $\alpha_1 + 2\alpha_2, 2\alpha_2 + a\alpha_3, 3\alpha_3 + 2\alpha_1$ 线性相关, 则 a 的值是 2.6、设 V_1 与 V_2 分别是齐次方程组 $x_1 + x_2 + \dots + x_n = 0$ 与 $x_1 = x_2 = \dots = x_n$ 的解空间, 则必有

$$P^n = V_1 \oplus V_2.$$

7、矩阵 A 一定有一个特征值是 5.

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

8、每一个 n 维线性空间一定可以表示成 n 个一维子空间的直和.9、二次型 $10x_1^2 + 8x_1x_2 + 24x_1x_3 + 2x_2^2 - 28x_2x_3 + x_3^2$ 一定是正定的.10、将多项式环 $P[x]$ 看作是数域 P 上的向量空间, 设 σ, τ 是此向量空间上的线性变换, ι 是恒等变换满足 $\sigma(f(x)) = f'(x), \tau(f(x)) = xf(x)$. 那么等式 $\sigma\tau - \tau\sigma = \iota$ 必成立.

2020 年硕士研究生招生考试题签

(请考生将题答在答题册上, 答在题签上无效)

科目名称: 高等代数

第 2 页共 3 页

二、(10 分) 计算 n 阶行列式

$$\begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 & \cdots & 1 & 1 \\ 1 & 0 & x & \cdots & x & x \\ 1 & x & 0 & \cdots & x & x \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 1 & x & x & \cdots & x & 0 \end{vmatrix}$$

三、(8 分) 设 $f(x) = a_m x^m + a_{m-1} x^{m-1} + \cdots + a_1 x + a_0$, 已知 A 是 n 阶方阵, 如果 $a_0 \neq 0$, 且 $f(A) = O$, 证明 A 可逆, 并求 A^{-1} .

四、(10 分) 设 $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3, \varepsilon_4, \varepsilon_5$ 是五维欧氏空间 V 的一组标准正交基, $V_1 = L(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3)$ 表示由 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ 生成的向量空间, 其中 $\alpha_1 = \varepsilon_1 + \varepsilon_5, \alpha_2 = \varepsilon_1 - \varepsilon_2 + \varepsilon_4, \alpha_3 = 2\varepsilon_1 + \varepsilon_2 + \varepsilon_3$, 求 V_1 的一组标准正交基.

五、(10 分) 设 $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_r$ 是一组线性无关的向量, $\beta_i = \sum_{j=1}^r a_{ij} \alpha_j, i = 1, 2, \dots, r$. 证明: $\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_r$ 线性无关的充要条件是

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1r} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2r} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{r1} & a_{r2} & \cdots & a_{rr} \end{vmatrix} \neq 0$$

六、(12 分) 设 a_1, a_2, \dots, a_n 是数域 P 中的 n 个两两不等的数,

$$A = \begin{pmatrix} a_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & a_2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & a_n \end{pmatrix},$$

求证: 1、 $W = \{f(A) \mid f(x) \in P[x]\}$ 是 P 上全体 n 阶方阵生成的向量空间 $M_n(P)$ 的子空间; (6 分)

2、 $\dim W = n$. (6 分)

沈阳工业大学

2020 年硕士研究生招生考试题签

(请考生将题答在答题册上, 答在题签上无效)

科目名称: 高等代数

第 3 页共 3 页

七、(10 分) 化下列二次型为标准形

$$x_1^2 - 2x_2^2 - 2x_3^2 - 4x_1x_2 + 4x_1x_3 + 8x_2x_3$$

八、(10 分) 设 σ, τ 是线性变换, ι 是恒等变换. 如果 $\sigma\tau - \tau\sigma = \iota$, 证明: $\sigma^k\tau - \tau\sigma^k = k\sigma^{k-1}, k > 1$.

九、(8 分) 求下列复系数矩阵 A 的若尔当标准形.

$$A = \begin{bmatrix} -1 & -2 & 6 \\ -1 & 0 & 3 \\ -1 & -1 & 4 \end{bmatrix}$$

十、(12 分) 设 A 为 n 阶矩阵, A^* 为其伴随矩阵, 且 $A_{11} \neq 0$, 证明: 线性方程组 $AX = B, B \neq 0$ 有无穷解的充要条件为 B 是 $A^*X = 0$ 的解.