中国科学院大学
2020年招收攻读硕士学位研究生入学统一考试试题
科目名称：高等数学（乙）

考生须知：

1．本试卷满分为150分，全部考试时间总计180分钟。

2．所有答案必须写在答题纸上，写在试题纸上或草稿纸上一律无效。

一、　**选择题** (本题满分50分，每小题5分。请从题目所列的选项中选择一个正确项填充空格。每题的四个备选项中只有一个是正确的，不选、错选或多选均不得分。请将你的选择标清题号写在考场发的答题纸上，直接填写在试题上无效。)

(1) 设 $f(x)=\begin{cases} e^x\sin 2x, x\le 0 \\ ax+b, x>0 \end{cases}$ 处处连续，处处可导。则 a,b 取值为（　　）。

（A）$a=2,b=0$　（B）$a=1,b=0$　（C）$a=2,b=1$　（D）$a=0,b=0$

(2) 下列一元函数积分公式中，错误的是（　　）。

（A）$\int_0^{\frac{\pi}{2}} f(\sin x)\mathrm{d}x=\int_0^{\frac{\pi}{2}} f(\cos x)\mathrm{d}x$

（B）$\int_0^{\frac{\pi}{2}} f(\sin x,\cos x)\mathrm{d}x=\int_0^{\frac{\pi}{2}} f(\cos x,\sin x)\mathrm{d}x$

（C）$\int_0^{\pi} f(\sin x)\mathrm{d}x=2\int_0^{\frac{\pi}{2}} f(\sin x)\mathrm{d}x$

（D）$\int_0^{\pi} f(\cos x)\mathrm{d}x=2\int_0^{\frac{\pi}{2}} f(\cos x)\mathrm{d}x$

(3) $\int_0^1 \frac{x\mathrm{d}x}{(2-x^2)\sqrt{1-x^2}}=$（　　）。

（A）π　（B）$\frac{\pi}{2}$　（C）$\frac{\pi}{3}$　（D）$\frac{\pi}{4}$

(4) 下列级数**不收敛**的是（　　）。

（A）$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{5^{n-1}+4^{n+1}}{3^{2n}}$　（B）$\sum_{n=1}^{\infty}\left(\sqrt{n+2}-2\sqrt{n+1}+\sqrt{n}\right)$

（C）$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2n}{3n+1}$　（D）$\sum_{n=1}^{\infty}q^n\cos nx(|q|<1)$

（5）下列说法完全正确的是（　　　）。

（A）令 $f(x)=\begin{cases}(1+x)^{\frac{1}{x}}, & x\neq 0\\ 1\quad , & x=0\end{cases}$ ，则0为 $f(x)$ 的第二类间断点。

（B）令 $f(x)=\lim\limits_{n\to+\infty}\dfrac{x+x^2e^{nx}}{1+e^{nx}}, x\in R$，则 $f(x)$ 为连续函数。

（C）令 $D(x)=\begin{cases}1, & x\text{为有理数}\\ 0， & x\text{为无理数}\end{cases}$ ，则 $D(x)$ 为偶函数，但不是周期函数。

（D）设 $f(x)$ 为[0, 1]上单调非减函数且 $f(0)=0$， $f(1)=1$，则 $f(x)$ 可以取到[0, 1]上的任何一个值。

（6）下列极限正确的是（　　　）。

（A） $\lim\limits_{n\to+\infty}\sin\left(\pi\sqrt{n^2+1}\right)=0$， $n\in N$ 。

（B） $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\tan x-\sin x}{\sin^3 x}=1$。

（C） $\lim\limits_{n\to+\infty}\left[\dfrac{1}{1\cdot 2\cdot 3}+\dfrac{1}{2\cdot 3\cdot 4}+\cdots+\dfrac{1}{n\cdot(n+1)\cdot(n+2)}\right]=\dfrac{1}{3}$， $n\in N$ 。

（D） $\lim\limits_{x\to+\infty}x(\dfrac{\pi}{2}-\arctan x)=\dfrac{1}{2}$ 。

（7）考虑半径为 $a(0<a<1)$ 的圆 $x^2+y^2=a^2$，过点 $P=(0,1)$ 做该圆的两条不同切线，切点分别为 A 和 B，若 ΔPAB 为等边三角形，则该圆的半径为（　　　）。

（A） $\dfrac{\sqrt{3}}{3}$　　（B） $\dfrac{\sqrt{2}}{2}$　　(C) $\dfrac{1}{2}$　　(D) $\dfrac{1}{3}$

（8） $\int_0^1 dx\int_0^{\sqrt{1-x^2}} e^{x^2+y^2}dy=$（　　　）。

（A） $\dfrac{\pi}{4}(e-1)$　　（B） $\dfrac{\pi}{2}(e-1)$　　（C） $e-1$　　（D） π

（9） $\oint\limits_L \sqrt{x^2+y^2}dx+y\left[\ln\left(x+\sqrt{x^2+y^2}\right)+xy\right]dy=$（　　　），其中 L 表示矩形区域 ABCD 边界沿逆时针方向,A(3,2),B(6,2),C(6,4),D(3,4)。

（A）50　　（B）52　　（C）28　　（D）56

（**10**）设函数 $y_1(x), y_2(x)$ 为二阶常系数线性齐次微分方程 $y''(x)+py'(x)+qy(x)=0$ 的两个特解，则 $y_1(x),\ y_2(x)$ 的线性组合能构成该方程通解的充分条件是（　　　）。

（A） $y_1(x)y_1'(x)-y_2(x)y_2'(x)=0$。

（B） $y_1(x)y_1'(x)-y_2(x)y_2'(x)\neq 0$。

（C） $y_1(x)y_2'(x)-y_2(x)y_1'(x)\neq 0$。

（D） $y_1(x)y_2'(x)-y_2(x)y_1'(x)=0$。

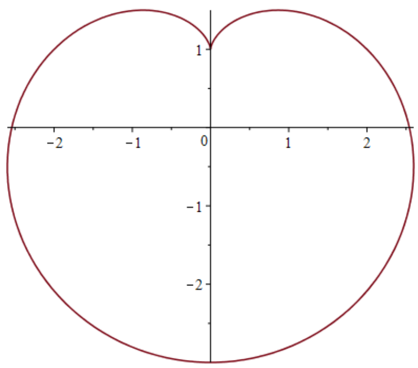
二、**(本题满分 10 分)** 求过点 $P:(0,1,-1)$，与平面 $\pi: x-3y+z-5=0$ 平行且与直线

$$l:\begin{cases}3x-2y+2z+3=0\\ 2x+y+z+1=0\end{cases}$$

共面的直线方程。

三、**(本题满分 10 分)** 设方程 $y^x-x^y=0$，求导函数 $y'(x)$。

四、**(本题满分 10 分)** 求如下心形曲线 $x=2\sin t-\sin 2t, y=2\cos t-\cos 2t(0\le t\le 2\pi)$ 的长度。



五、(本题满分 10 分) 令曲线C为圆柱面$x^2+z^2-1=0$与平面$x+y+z-1=0$的交线，求C到原点的最大和最小距离。

六、(本题满分 10 分) （1）证明：$\arctan\frac{1}{2n^2}=\arctan\frac{1}{2n-1}-\arctan\frac{1}{2n+1}$。

（2）求级数$\sum_{n=1}^{\infty}\arctan\frac{1}{2n^2}$的和。

七、(本题满分 10 分) 求下列常微分方程初值问题的解：$y'(x)=\frac{y}{x}+\frac{x}{2y},x>0$；

$y(1)=2$。

八、(本题满分 10 分) 计算第二型曲面积分$\iint_S(x^2+2y^2+2z^2)dydz$，其中$S$为半球面

$x=\sqrt{1-y^2-z^2}$被锥面$x=\sqrt{y^2+z^2}$截下部分的内侧。

九、(本题满分 10 分) （1）求幂级数$\sum_{n=1}^{\infty}nx^n$的收敛域与和函数；

（2）求级数$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2n+1}{3^n}$之和。

十、(本题满分 10 分) （1）证明：$\frac{1}{n+1}<\ln(1+\frac{1}{n})<\frac{1}{n}$，$n\in N$。

（2）令$a_n=1+\frac{1}{2}+\cdots+\frac{1}{n}-\ln n$，证明：$a_n$收敛。

十一、(本题满分 10 分) 设三阶连续可微函数$f(x)\le 0$，其中$x\in(0,1)$。并且$f(x)=0$在区间$(0,1)$内存在两个相异实根。证明：存在$\xi\in(0,1)$，使得$f'''(\xi)=0$。