

中国科学院大学
2020 年招收攻读硕士学位研究生入学统一考试试题
科目名称：高等数学（甲）

考生须知：

1. 本试卷满分为 150 分，全部考试时间总计 180 分钟。
2. 所有答案必须写在答题纸上，写在试题纸上或草稿纸上均无效。

一、选择题 (本题满分 50 分，每小题 5 分。请从题目所列的选项中选择一个正确项填充空格。每题的四个备选项中只有一个是正确的，不选、错选或多选均不得分。请将你的选择标清题号写在考场发的答题纸上，直接填写在试题上无效。)

1. 极限 $\lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\frac{2}{n^2} + \frac{4}{n^2+1} + \cdots + \frac{2n}{n^2+n-1} \right)$ 的值为()。
A. 0 B. 1 C. 2 D. $+\infty$
2. 设 $f(x)$ 在 $x = a$ 处连续, $F(x) = f(x)|x - a|$, 则 $f(a) = 0$ 是 $F(x)$ 在 $x = a$ 处可导的()。
A. 充要条件 B. 充分非必要条件
C. 必要非充分条件 D. 既非充分又非必要条件
3. 极限 $\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} (\sin x)^{\frac{1}{1-\sin x}}$ 的值为()。
A. e^{-1} B. 1 C. e D. $+\infty$
4. 设周期函数 $f(x)$ 在 $(-\infty, +\infty)$ 内可导, 周期为 4, 又 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(1)-f(1-x)}{2x} = -1$, 则曲线 $y = f(x)$ 在点 $(5, f(5))$ 处的切线斜率为()。
A. $\frac{1}{2}$ B. 2 C. -1 D. -2
5. 设向量 $\vec{a} = (1, 2, 2)$, $\vec{b} = (0, 1, 2)$, 则向量 \vec{b} 在向量 \vec{a} 方向上的投影向量为()。
A. $\left(0, \frac{6}{5}, \frac{12}{5} \right)$ B. $\left(\frac{1}{3}, \frac{2}{3}, \frac{2}{3} \right)$ C. $\left(0, \frac{1}{\sqrt{5}}, \frac{2}{\sqrt{5}} \right)$ D. $\left(\frac{2}{3}, \frac{4}{3}, \frac{4}{3} \right)$

6. 二元函数 $f(x, y)$ 在点 $(0, 0)$ 处可微的一个充分条件是 ()。

A. $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} [f(x, y) - f(0, 0)] = 0.$

B. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x, 0) - f(0, 0)}{x} = 0, \text{ 且 } \lim_{y \rightarrow 0} \frac{f(0, y) - f(0, 0)}{y} = 0.$

C. $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{f(x, y) - f(0, 0)}{\sqrt{x^2 + y^2}} = 0.$

D. $\lim_{x \rightarrow 0} [f'_x(x, 0) - f'_x(0, 0)] = 0, \text{ 且 } \lim_{y \rightarrow 0} [f'_y(0, y) - f'_y(0, 0)] = 0.$

7. 级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)(n+2)}$ = ()。

A. 0 B. $\frac{1}{4}$ C. $\frac{1}{3}$ D. 1

8. 设方程 $x + y + z = e^{xy}$, 则 $\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 z}{\partial y^2}$ 的表达式是 ()。

A. $(x^2 + y^2)e^{xy}$ B. $(x + y)e^{xy}$

C. $2xye^{xy}$ D. $(1 + xy)e^{xy}$

9. 设 $a_0 = 3, a_1 = 5$, 且对任何自然数 $n > 1$ 有 $na_n = \frac{2}{3}a_{n-1} - (n-1)a_{n-1}$, 则幂级数 $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ 的收敛半径为 ()。

A. $\frac{2}{3}$ B. 1 C. $\frac{3}{2}$ D. 2

10. 下列反常积分发散的是 ()。

A. $\int_0^{+\infty} \frac{x^6}{1+e^x} dx$ B. $\int_0^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{x(1+x)}} dx$

C. $\int_1^{+\infty} \frac{1}{x^4 \ln x} dx$ D. $\int_1^{+\infty} \frac{2 \sin^2 x}{1+x^2} dx$

二、(本题满分 10 分) 已知 $\lim_{x \rightarrow 0} f(x)$ 存在, 而 $\lim_{x \rightarrow 0} f'(x)$ 不存在, 并且 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt[3]{1+xf(x)} - 1}{\sin x} = 3,$

求 $\lim_{x \rightarrow 0} f(x)$ 。

三、(本题满分 10 分) 两平面均通过点 $A(-2, 1, -1)$, 其中一个平面通过 x 轴, 另一个平面

通过直线 $\frac{x-1}{2} = \frac{y+1}{1} = \frac{z}{-1}$ ，求两平面夹角的余弦。

四、(本题满分 10 分) 设函数 $y = f(x)$ 由 $\begin{cases} x^x + tx - t^2 = 0, \\ \arctan(ty) = \ln(1 + t^2y^2) \end{cases}$ 确定, 求 $\frac{dy}{dx}$ 。

五、(本题满分 10 分) 已知函数 $u = f(r), r = \ln\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$ 满足方程

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} = (x^2 + y^2 + z^2)^{-3/2}, \text{ 求 } f(x) \text{ 的表达式。}$$

六、(本题满分 10 分) 设曲线 $C: y = x^3 + 2x$ 与其在 $(1, 3)$ 点处的切线以及 x 轴围成的区域落在第一象限中的部分为 D , 计算:

(1) D 的面积;

(2) D 绕 x 轴旋转一周所得旋转体的体积。

七、(本题满分 10 分) 计算下列第二型曲面积分:

$$\iint_S xdydz + 2y^4 dx dz + 3z^6 dx dy,$$

其中 S 是椭球面: $x^2 + 4y^2 + 9z^2 = 1$ 。

八、(本题满分 10 分) 设 $f(x)$ 是周期为 3 的连续函数, 证明: 在任意长度为 2 的闭区间 $[a, a+2]$ 上至少存在一点 θ , 使得 $f(\theta) = f(\theta+1)$ 。

九、(本题满分 10 分) 设 $f(x), g(x)$ 在 $[a, b]$ 上二阶可导, 且 $f(a) = f(b) = g(a) = 0$. 证明: 存在 $\xi \in (a, b)$, 使得 $f''(\xi)g(\xi) + 2f'(\xi)g'(\xi) + f(\xi)g''(\xi) = 0$ 。

十、(本题满分 10 分) 设 f 是 $[0, 1]$ 上的连续函数, 满足 $\int_0^x f(t)dt \geq 0$ 对所有的 $x \in [0, 1]$ 成立

$$\text{且 } \int_0^1 f(t)dt = 0. \text{ 证明: } \int_0^1 xf(x)dx \leq 0.$$

十一、(本题满分 10 分) 求证: 若正数 x, y, z 满足 $x^2 + y^2 + z^2 = a$, 其中 $a > 0$, 则有不等

$$\text{式 } x^3 + y^3 + z^3 \geq \frac{a\sqrt{3a}}{3} \text{ 恒成立。}$$