

中国科学院大学
2020年招收攻读硕士学位研究生入学统一考试试题
科目名称：数学与物理综合

考生须知：

1. 本试卷满分为150分，全部考试时间总计180分钟。
2. 所有答案必须写在答题纸上，写在试题纸上或草稿纸上一律无效。

试题总分为150分，其中数学部分试题小计分为75分，物理部分试题小计分为75分。

数学部分试题

微积分（45分）

1. (5分) k 为实常数，求出满足下述条件的常数 a 和 b ：

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{x^2 + k^2}{x + 1} - ax - b \right) = 0.$$

2. (10分) 设 $f \in C([a, b])$, $x_1, \dots, x_n \in [a, b]$. 证明：存在 $\xi \in [a, b]$ 使得

$$f(\xi) = \lambda_1 f(x_1) + \dots + \lambda_n f(x_n).$$

这里 $\sum_{i=1}^n \lambda_i = 1$ 且 $\lambda_i > 0$ ($i = 1, \dots, n$)。

3. (10分) 讨论级数 $\sum_{n=1}^{\infty} 2^n \sin \frac{1}{3^n x}$ 在 $(0, \infty)$ 上的一致收敛性。
4. (10分) 设 f 是 $[0, +\infty)$ 上以 $T > 0$ 为周期的连续函数, 试证

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{x} \int_0^x f(s) ds = \frac{1}{T} \int_0^T f(s) ds.$$

5. (10分) 设 $D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 \leq 1\}$, 计算二重积分 $\iint_D (xy^2 + x^2) dx dy$ 。

线性代数（30分）

1. (10分) 讨论 α 取何值时以下方程组有解，并求其解(18分)：

$$\begin{aligned} 3x_1 + x_2 - x_3 - 2x_4 &= 2, \\ x_1 - 5x_2 + 2x_3 + x_4 &= -1 \\ 2x_1 + 6x_2 - 3x_3 - 3x_4 &= \alpha + 1 \\ -x_1 - 11x_2 + 5x_3 + 4x_4 &= -4. \end{aligned}$$

2. (10分) 如果一个 5×5 的矩阵 A 的特征多项式为 $\chi(x) = (x - 3)^4(x + 2)$ 且矩阵 $A - 3I_5$ 的秩为3, 其中 I_5 是5阶单位矩阵, 求出 A 的Jordan标准型 J_A .
3. (10分) 证明:
- (1) 如果 A 是正定矩阵, 则 A^{-1} 也是正定矩阵; (5分)
 - (2) 如果 A 和 B 是正定矩阵, 则 $2A + 3B$ 也是正定矩阵。(5分)

中国科学院大学
2020 年招收攻读硕士学位研究生入学统一考试试题
科目名称：数学与物理综合

物理部分，试题分值共 100 分，按要求选做 75 分，满分 75 分。

一、单项选择题（每小题 5 分，请选做 3 小题；如果多做，只计入前 3 小题的分数）

1. 在高空走钢丝者手持长杆作为辅助，所应用的物理原理是

- (A) 长杆很重，走钢丝者手持长杆有一种踏实的感觉；
- (B) 长杆的转动惯量对运动的平衡作用；
- (C) 长杆对风的平衡能力；
- (D) 走钢丝者的体重加上长杆的重量，增加了运动的惯性。

2. 三个点电荷分别位于边长为 a 的正三角形的三个顶点，它们的电荷量分别为 q ， $2q$ 和 $-4q$ 。真空介电常数为 ϵ_0 ，则这个系统的总静电能为（设相距无穷远时相互作用能为零）

- (A) $-5q^2/2\pi\epsilon_0 a$ ； (B) $-5q^2/4\pi\epsilon_0 a$ ； (C) $-7q^2/4\pi\epsilon_0 a$ ； (D) $-7q^2/2\pi\epsilon_0 a$ 。

3. 有一半径为 R 的单匝圆线圈，通以顺时针电流 I 。若将该导线弯成匝数 $N = 2$ 的平面圆线圈，导线总长度保持不变，并且线圈中电流仍为顺时针电流 I ，则线圈中心的磁感应强度和线圈的磁矩分别是原来的

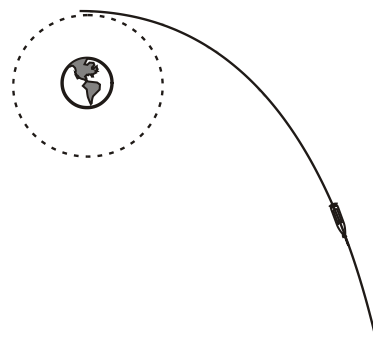
- (A) 4 倍和 1/8； (B) 4 倍和 1/2； (C) 2 倍和 1/4； (D) 2 倍和 1/2。

4. 以下选项中，最接近理想气体的是

- (A) 低温高压气体；
- (B) 低温低压气体；
- (C) 高温低压气体；
- (D) 气液共存时的气体。

二、（必做题，15分）一束光线从折射率为 n_1 的介质入射到折射率为 n_2 的介质（设 $n_1 < n_2$ ），在两种介质的界面有反射和折射现象。在处理光的反射问题时，简述费马原理和菲涅耳公式各得到哪些主要结论。

三、（必做题，25分）如图所示，离地心 $3R$ （ R 为地球半径）处有一质量为 m 的飞船绕地球作匀速圆周运动，问：



(1) 它的运行速度大小 v_0 为多少？

(2) 飞船在此处要将它的运动速度大小至少增加到 v_1 为多少时，它才能飞离地球？

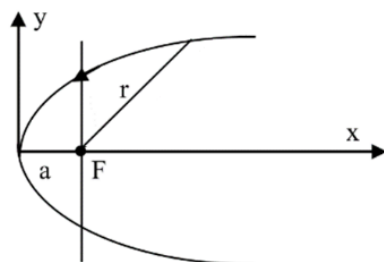
(3) 飞船在 $3R$ 处，速度大小瞬间增加到 v_1 后（方向不变）

关闭发动机，则在飞离地球的过程中，离地心为 $12R$ 处，它的切向加速度大小 a_τ 为多少？该处轨道的曲率半径 ρ 为多少？

注：以上各答案都用地球半径 R 以及地球表面附近的重力加速度 g 来表示。

（请从以下第四、五题中选做一题。如果多做，只计前一题的分数。）

四、（选做题，20分）如图所示，一条无穷长的导线载有电流 I ，该导线弯成一抛物线形状，抛物线方程为 $y^2 = 4ax$ ，抛物线焦点 F 的坐标为 $(a, 0)$ ，真空中的磁导率为 μ_0 ，求焦点 F 处的磁感应强度 B 。



五、（选做题，20分）球形电容器由半径为 R_1 的导体球和与它同心半径为 R_2 的导体球壳构成， $R_1 < R_2$ 。其间充满电介质，介质的介电常数是变化的，在 R_1 处相对介电常数为 ϵ_1 ，在 R_2 处相对介电常数为 ϵ_2 ，半径 R_1 到 R_2 之间电介质的相对介电常数随半径的变化而连续线性从 ϵ_1 变化到 ϵ_2 。内球带自由电荷 Q 。

(1) 求介质中的电场分布。

(2) 作半径为 $R_3 = (R_1 + R_2)/2$ 的球面（球心与导体球相同），求此球面内电荷总量。