四川轻化工大学 2022 年研究生招生考试业务课-样卷

（满分：150 分，所有答案一律写在答题纸上）

招生专业：0701 数学

考试科目：601 数学分析

考试时间：3 小时

一．填空题（本题满分 40 分，每小题 5 分）

1．设 $\dfrac{d}{dx}\int_0^{e^{-x}} f(t)dt = e^x$，则 $f(x) =$ ________________.

2．设 $f(x) = \dfrac{1}{\sqrt{1+x^2}\left(x+\sqrt{1+x^2}\right)}$．则 $\int f(x)dx =$ ________________.

3．若 $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\dfrac{x^2+1}{x+1} - ax - b\right) = 0$，则 $a =$ ____________，$b =$ ____________.

4、已知积分 $\oint_L xy^2dx + y\varphi(x)dy$ 与路径无关，其中 $\varphi(x)$ 具有连续导数，且 $\varphi(0) = 0$，

则 $\varphi(x) =$ ____________.

5．曲线 $\begin{cases} 3x^2y + y^2z = -2 \\ 2xz - x^2y = 3 \end{cases}$ 在点 $(1,-1,1)$ 处的切线方程为____________________.

6．设 $f(x, y)$ 可微，$f(1,1) = 1$，$f_x(1,1) = a$，$f_y(1,1) = b$，令

$$\phi(x) = f(x, f(x, f(x, x)))$$

则 $\phi'(1) =$ ________________________________.

7．一质点受力 $\mathbf{F}(x, y) = \left(P(x, y), Q(x, y)\right)$ 的作用，沿平面曲线 L 从点 A 移到点 B，则力 $\mathbf{F}$ 所作的功可用线积分表为 $W =$ __________________________________.

8．在极坐标系下更换积分 $\int_0^1 dx\int_x^1 f(x, y)dy$ 的顺序为______________________.

二、（本题满分 10 分）计算极限 $\lim\limits_{n\to\infty} n^2\left(a^{\frac{1}{n}} - a^{\frac{1}{n+1}}\right)$，$a > 0$.

三．（本题满分 12 分）求幂级数$\sum_{n=1}^{\infty} n(n+1)x^n$的和函数.

四、（本题满分 12 分）计算$\oiint_S \frac{x}{r^3}dydz+\frac{y}{r^3}dzdx+\frac{z}{r^3}dxdy$，其中$r=\sqrt{x^2+y^2+z^2}$，$S$为不经过原点的任意按片光滑的封闭曲面，取外侧.

五、（本题满分 14 分）计算$\int_0^{+\infty} e^{-px}\frac{\sin bx-\sin ax}{x}dx$（$p>0,b>a$）.

六、（本题满分 14 分）求出椭球面$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1$在第一卦限中的切平面与三个坐标平面所围成四面体的最小体积.

七、（本题满分 12 分）设a为正常数，（1）证明：$\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{a}=1$；（2）若$\lim_{n\to\infty}a_n=a$（$a_n>0$），证明：$\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{a_n}=1$.

八、（本题满分 10 分）设$f(x,y,z)$在$D=\{(x,y,z)\mid x^2+y^2+z^2<1\}$内有定义，$f(x,y,z)$是$z$的连续函数，若对任意$(x,y,z)\in D$，有

$$\left|f_x(x,y,z)\right|\le 1,\quad \left|f_y(x,y,z)\right|\le 1$$

证明：函数$f(x,y,z)$在D内连续.

九、（本题满分 12 分）设$f(x)$在$(-\infty,+\infty)$上二阶可导，且$f(x)$在$(-\infty,+\infty)$上有界，证明：$\exists\xi\in(-\infty,+\infty)$，使得

$$f''(\xi)=0$$

十、（本题满分 14 分）证明：函数列$S_n(x)=n\ln(1+\frac{x}{n})(n=1,2,\cdots)$在$[0,a]$上一致收敛$(a>0)$,在$(0,+\infty)$上不一致收敛.