机密★启用前

四川轻化工大学2021年研究生招生考试业务课试卷

（满分：150分，所有答案一律写在答题纸上）

适用专业：0701 数学

考试科目：808 高等代数 A 卷

考试时间：3 小时

一、填空题（每题5分，共40分）

1、设 A 为4阶矩阵，且 $|A|=2$，则 $|2AA^*|=$ ________。

2、计算 $\begin{pmatrix}0&1&0\\1&0&0\\0&0&1\end{pmatrix}^{2020}\begin{pmatrix}1&2&3\\4&5&6\\7&8&9\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0&0&1\\0&1&0\\1&0&0\end{pmatrix}^{2021}=$ ________。

3、设 $x_1,x_2,\cdots,x_n$ 是互不相同的数，向量组 $\alpha_i=(1,x_i,x_i^2,\cdots,x_i^{n-1})\ (i=1,2,\cdots n)$ 必线性________（填“相关”或“无关”）。

4、设 $A=xx^T$，其中 $x=(a_1,\cdots,a_n)^T$，且 a_i 为非零实数（$i=1,\cdots,n$），x^T 是 x 的转置矩阵，若 $A^{10}=mA$，则 $m=$ ________。

5、设 $A=\begin{pmatrix}1&-1&2&3\\0&1&0&2\\1&2&-1&0\\2&1&3&1\end{pmatrix}$，则 $A_{11}+2A_{12}-A_{13}=$ ________（其中 A_{ij} 是元素 a_{ij} 的代数余子式）。

6、设 $x=(a,b,c)^T$ 是 R^3 中的任意向量（R 为实数集），映射 $\sigma(x)=(a,3a-b,b+c)$ 是否是 R^3 到自身的线性变换？________（填“是”或“否”）。

7、设 $\mathcal{A}$ 为线性空间 V 上的线性变换，请列举出一个 $\mathcal{A}$ 的不变子空间的例子 ________。

8、设 σ 为 n 维线性空间 V 上的线性变换，则 σ 的秩 + σ 的零度 = ________。

二、计算题（共 74 分）

1、（12 分）试求 7 次多项式 $f(x)$，使得 $f(x)+1$ 能被 $(x-1)^4$ 整除，而 $f(x)-1$ 能被 $(x+1)^4$ 整除。

2、（14 分）已知 4 阶方阵 $A=(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4)$，$\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4$ 是线性无关的列向量，$\alpha_1=2\alpha_2-\alpha_3$，$\beta=\alpha_1+\alpha_2+\alpha_3+\alpha_4$，求 $AX=\beta$ 的通解。

3、（18 分）设 $A=\begin{pmatrix}1&2&-3&-2\\0&1&2&-3\\0&0&1&2\\0&0&0&1\end{pmatrix}$，$B=\begin{pmatrix}1&2&0&1\\0&1&2&0\\0&0&1&2\\0&0&0&1\end{pmatrix}$，试求矩阵 C 满足等式 $(2E-B^{-1}A)C^T=B^{-1}$。

4、（15 分）求二次型 $f(x_1,x_2,\cdots,x_n)=(n-1)\sum\limits_{i=1}^{n}x_i^2-2\sum\limits_{1\le i<j\le n}x_ix_j$ 的符号差。

5、（15 分）已知 $\alpha=(k,0,\cdots,0,k)^T$，且 $A=E-\alpha\alpha^T, B=E+\frac{1}{k}\alpha\alpha^T, AB=E$，求 k 的值。

三、证明题（共 36 分）

1、（18 分）证明：复数域上 n 阶方阵 A 相似于对角阵的充要条件是对于 A 的任一特征根 λ，有 $A-\lambda E$ 与 $\left(A-\lambda E\right)^2$ 等秩。

2、（18 分）设 V_1 与 V_2 分别是齐次方程组 $x_1+x_2+\cdots+x_n=0$ 与 $x_1=x_2=\cdots=x_n$ 的解空间，证明 $P^n=V_1\oplus V_2$（其中 $\oplus$ 表示直和）。