中欧航空工程师学院研究生入学考试《数学分析与高等代数》考试大纲

一、考题类型

《数学分析与高等代数》可目试卷共设置六个题目，其中两个简答题各20分，两个基础题各25分，以及两个综合题各30分，总计150分。

二、参考数目

(1) 《Mathematiques tout-en-un I annee》, Dunod

(2) 《Mathematiques tout-en-un II annee》, Dunod

(3) 《中欧学院预科数学讲义》，中欧学院数学教研室

三、知识要点

第一部分：单变量微积分

（一）数列

1 数列极限的定义及运算

2 判断数列收敛方法：单调有界收敛定理、夹挤定理、收敛数列子列必收敛、柯西数列必收敛

3 数列的比较，O, o与等价;常见数列的比较

4 递归数列的极限

（二）极限与连续

1 函数极限的定义（9种情况），函数极限的四则运算，复合函数的极限

2 函数在一点极限存在性判断：夹挤定理、单调函数极限的存在性、归结原理（函数极限与数列极限的关系）

3 函数的比较，O, o与等价；常见函数的比较

4 闭区间上连续函数定理：介值定理、最值定理

（三）导数

1 导数、左导数、右导数的定义，导数的四则运算，复合函数求导，反函数求导

2 高阶导数，莱布尼兹公式，$\mathcal{C}^k$-类函数的定义及各种运算

3 基本初等函数的导函数

4 罗尔定理，拉格朗日中值定理，柯西中值定理，有限增量不等式

5 极限展开式的定义，极限展开式的运算

6 基本初等函数的极限展开式，极限展开式的应用：求极限、找等价

（四）积分

1 闭区间上分段连续函数积分的定义

2 积分的保序性，线性性，可加性，柯西-施瓦茨不等式

3 连续函数的原函数

4 积分的计算：分部积分与变量替换公式，有理函数的积分，无理函数的积分，含有三角函数的复合函数的积分

第二部分：高等代数

（五）自然数

1 有限集基数计算公式

2 数学归纳原理

（六）向量空间

1 向量空间、子空间的定义，由子集生成的子空间的定义及表示方法

2 子空间的和与直和，互补子空间，向量空间的直积

3 线性映射、线性型、自同态的定义；线性映射集的向量空间结构

4 线性映射的复合；线性映射的核与象集；单同态、满同态、自同态、同构的定义；同构映射的逆映射

5 对称和投影的定义及等价刻画

（七）有限维向量空间

1 线性无关族，线性相关族，生成族及向量空间基的定义

2 有限维向量空间及其维数的定义

3 基的扩充定理

4 子空间的和与直和的维数计算公式；补空间的存在性与构造

5 秩定理

（八）多项式

1 多项式的次数，多项式的加法和乘法运算

2 一元多项式集合$\mathbb{K}[X]$的向量空间结构和环结构

3 多项式的因式和倍式，$\mathbb{K}[X]$中的带余除法，辗转相除法

4 多项式函数与有理函数

5 多项式的导数，高阶导数，乘积多项式高阶求导的莱布尼兹公式，泰勒公式及其应用：刻画多项式根的重数

6 两个多项式的公因子，互素多项式，最大公约式，欧几里得算法，最大公倍式，贝祖定理，高斯定理.

7 不可约多项式，多项式的不可约分解式的存在唯一性，能熟练将一个实系数多项式在实数域或复数域内进行不可约分解

（九）矩阵

1 矩阵的运算：加法、乘法、数乘与转置

2 线性映射在给定基下的矩阵，矩阵与线性映射之间的一一对应关系

3 过渡矩阵，同一线性映射在不同基下的矩阵之间的关系

4 矩阵的初等行、列变换，初等变换求可逆矩阵的逆矩阵

5 矩阵秩的定义，初等变换求矩阵的秩，矩阵秩的等价刻画

（十）行列式

1 行列式的定义

2 行列式的计算：矩阵相乘的行列式，转置矩阵的行列式，矩阵初等变换与行列式

3 余子式，代数余子式，矩阵按行列展开

4 伴随矩阵，利用伴随矩阵表示可逆矩阵的逆矩阵

5 掌握行列式的计算各种常用方法

（十一）线性变换的约化

1 不变子空间、诱导映射的定义，诱导映射的矩阵刻画

2 线性变换在不变子空间的直和分解下的矩阵表示（准对角矩阵）

3 线性变换（或方阵）特征值、特征向量、特征子空间及谱的定义

4 特征多项式，特征值的重数，汉密尔顿-凯莱定理

5 线性变换（或方阵）可对角化的定义；线性映射（或方阵）可对角化的各种判别法

6 会判断一个线性映射（或方阵）能否对角化，会将一个（三阶）可对角化的方阵进行对角化

（十二）欧式空间

1 内积的定义，柯西-施瓦茨不等式

2 向量正交、正交族、单位正交族及单位正交基的定义

3 会用施密特正交化将线性无关族单位正交化

4 正交补，正交对称及正交投影的定义及等价刻画

5 正交变换和正交矩阵的定义及等价刻画

第三部分：级数与广义积分

（十三）数项级数

1 黎曼级数的敛散性，正项级数收敛判别法：比较判别法、积分比较法

2 交错级数的敛散性，收敛交错级数余项的上界

3 级数收敛的柯西准则，达朗贝尔判别法

4 绝对收敛级数必收敛，绝对收敛级数的柯西乘积

（十四）函数列与函数项级数

1 函数列简单收敛，一致收敛定义

1 函数项级数简单收敛，一致收敛，依范数收敛定义

2 熟练掌握函数列一致收敛、函数项级数一致收敛和依范数收敛各种判别法

3 一致收敛函数列（函数项级数）和函数的连续性、可导性定理

4 函数项级数组逐项积分定理

（十五）幂级数

1 幂级数收敛半径定义

2 掌握求幂级数收敛半径常用方法

3 两个幂级数和函数的收敛半径，两个幂级数柯西乘积的收敛半径

4 实变量幂级数和函数的性质：连续性、可导性以及和函数的积分

5 实变量函数幂级数展开的定义及运算

6 熟练掌握各基本初等函数的幂级数展开式

（十六）广义积分

1 非负函数可积性定义及各种判别法：比较判别法、原函数判别法；积分可加性，

2 复值函数可积性定义及判别准则

3 控制收敛定理，逐项积分定理

4 广义积分变量替换公式

5 含参变量的积分：连续性定理和可导性定理

（十七）傅里叶级数

1 傅里叶系数的定义、性质与计算

2 均方收敛（依二范数收敛）的定义，帕塞瓦尔-贝塞尔等式

3 准点收敛定理

4 依范数收敛定理

第四部分：多变量微积分

（十八）多元函数的极限与连续性

1 平面点集的有关概念以及平面点列的定义

2 二元函数极限的定义与计算

3 二元函数连续性定义

4 向量空间$C(A,\mathbb{R})$、$C(A,\mathbb{R}^2)$

（十九）多元函数微分学

1 多元函数的偏导数定义与计算

2 多元函数的一阶极限展开式、可微性与全微分定义

3 复合函数计算偏导数/导数的链式法则

4 方向导数的定义、梯度的定义与计算

5 高阶偏导数的定义与计算，掌握Schwarz定理

6 二元函数的Taylor公式、带积分型余项的Taylor公式、二阶Taylor-Young公式

7 二元函数的极值: 极值的定义, $\mathcal{C}^1$-类函数极值的必要条件、$\mathcal{C}^2$-类函数极值的充分条件

（二十）重积分

1 有界闭集上连续函数二重积分的定义及其性质

2 二重积分的常用计算方法：在直角坐标系下计算、利用变量替换法计算（包括利用极坐标计算）

3 有界闭集上连续函数三重积分的定义及其性质

4 三重积分的常用计算方法：在直角坐标系下计算（包括投影法和截面法）、利用变量替换法计算（包括利用柱坐标、球坐标计算）

第五部分：微分方程

（二十一）微分方程

1 一阶线性微分方程求解，必要时考虑解的连接

2 常见二阶常系数线性微分方程求解

3 常系数一阶线性微分方程组求解

4 求二阶齐次线性微分方程多项式解和幂级数解

5 降阶法或借助朗斯基行列式的方法求解二阶线性微分方程